

LINEARE ALGEBRA

Teil 3 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

Gleichungen und Gleichungssysteme

Dreireihige Determinanten

Datei Nr. 61 013

Friedrich Buckel

Stand 6. Oktober 2014

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

(1) **Behandlung dieser Themen in 6 ausführlichen Texten (mit vielen Trainingsaufgaben):**

61011 Lineare Algebra Teil 1

1 Gleichung mit 2 oder 3 Unbekannten, 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Zuerst wird hier das Rechnen mit Paaren und Tripeln behandelt, ferner Linearkombinationen von Zeilen- oder Spaltenvektoren.

Außerdem wird gezeigt, wie man die hier besprochenen Gleichungen mit den CAS-Rechnern CASIO ClassPad und TI Nspire lösen lässt (ab Seite 29).

61012 Lineare Algebra Teil 2

2 oder 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten.

Als Lösungsverfahren wird die Additionsmethode verwendet, aber auch zweireihige Determinanten und die Cramersche Regel.

61013 Lineare Algebra Teil 3 (Dieser Text)

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten.

Als Lösungsverfahren die Determinantenmethode und die Cramersche Regel verwendet. Es wird auch gezeigt, wie man CAS-Rechner einsetzen kann.

Außerdem: **4 Gleichungen mit 3 Unbekannten.**

61014 Lineare Algebra Teil 4

Gleichungen mit 4 Unbekannten (mit vierreihigen Determinanten).

61015 Lineare Algebra Teil 5

Gleichungssysteme mit Parametern.

Speziell: **Berechnungsmethoden mit CAS-Rechnern !**

61016 Lineare Algebra Teil 6

Textaufgaben (meist Mischungsaufgaben), die auf lineare Gleichungssysteme führen.

(2) Der neue Text 61020 verzichtet ganz auf Determinanten und CAS-Rechner.
Dort werden Gleichungssysteme durch Eliminationsverfahren gelöst.

61020 Trainingsheft für Schüler. Kompakt und doch sehr ausführlich.

Die wichtigsten Arten von Gleichungssystemen werden nur mit Elimination gelöst. Wer zwischendurch andere Verfahren sehen will, kann auf die oben genannten Texte zugreifen.

61051 Aufgabensammlung

Weitere Aufgaben mit ausführlichen Lösungen

(3) **Die Lösung von Gleichungssystemen mit dem Gauß-Algorithmus** (also mit Matrizen) wird in diesen Texten besprochen:

62011 3 oder 4 Gleichungen mit 3 oder 4 Unbekannten

62012 Gleichungssysteme mit Parametern

62041 Aufgabensammlung zum Gauß-Verfahren.

62112 Lösbarkeit linearer Gleichungssysteme

Zum Inhalt dieses Textes

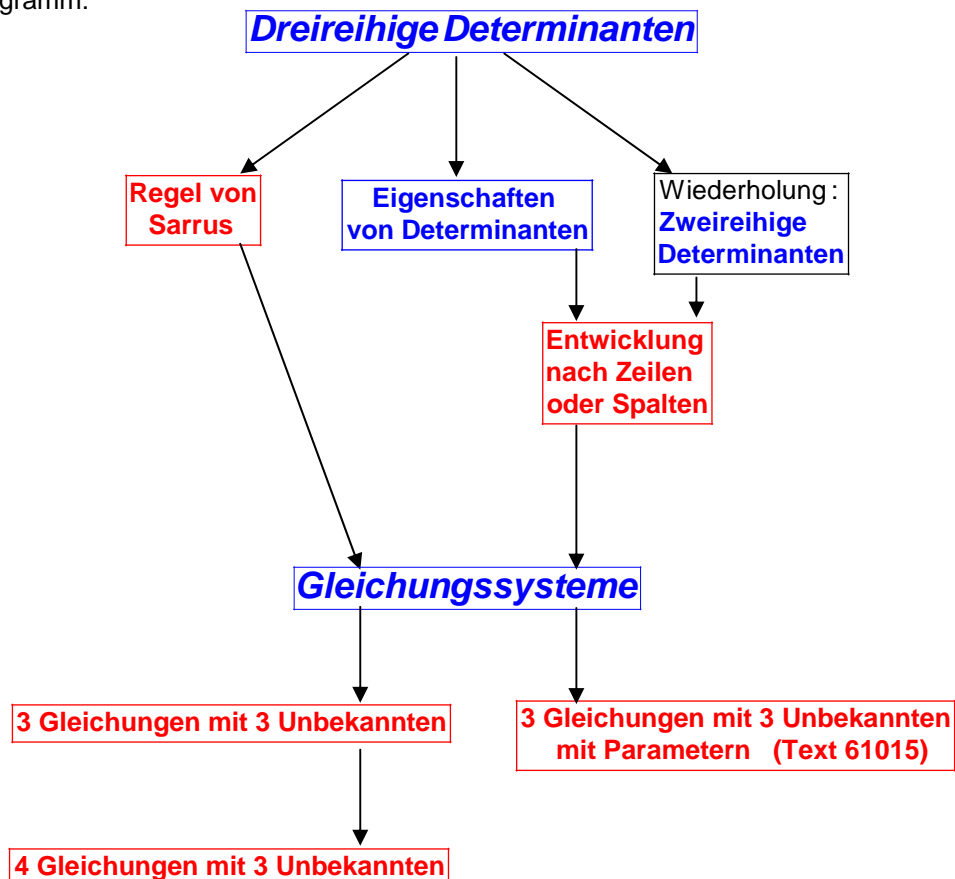
Um dreireihige Determinanten berechnen zu können, reicht die Kenntnis der **Regel von Sarrus**. Diese wird in § 2 Abschnitt 2.1 besprochen. Man kann hier aufhören und dann zur Lösung der Gleichungssysteme übergehen. Den Abschnitt **2.2 über Eigenschaften von Determinanten** sollte nur durcharbeiten, wer sich die Berechnung von Determinanten dadurch erleichtern will, dass er sie vor der Berechnung erst vereinfacht.

In **2.4 wird eine andere Berechnungsmethode gezeigt, die Entwicklung einer Determinante** nach einer Zeile oder Spalte. Manche Lehrer vermitteln nur diesen Weg, andere gehen gar nicht darauf ein. Wer mehr Zeit aufwenden will, lernt die Vereinfachung der Determinanten in 2.2, bei der zwei Nullen in einer Zeile oder Spalte erzeugt werden. Dies ist effektiv die kürzeste Berechnungsmethode. Gelingt es nicht, zwei Nullen zu erzeugen, sollte man die Sarrus-Regel anwenden.

Wer jedoch vierzeilige Determinanten berechnen soll, muss sich schon um den ganzen Stoff in der Datei 61014 bemühen.

Gleichungssysteme aus 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten werden – bei eindeutiger Lösbarkeit hier nur mit Determinanten gelöst. Wer das Eliminationsverfahren üben will, sollte den Text 61020 zur Hand nehmen!

Arbeitsdiagramm:



Inhalt

Teil 3 (61013) 3 und 4 Gleichungen mit 3 Unbekannten

§ 1	Zwei- und dreireihige Determinanten	5
1.1	Wiederholung: zweireihige Determinanten	5
1.2	Dreireihige Determinanten: Regel von Sarrus	6
	Aufgabe 1	6
1.3	Wann hat eine Dreier-Determinante dem Wert 0?	7
1.4	Linearkombinationen von Zeilen oder Spalten	8
1.5	Faktoren aus Determinanten herausziehen	9
1.6	Vielfache von Zeilen zu anderen Zeilen addieren ändert den Wert nicht	9
	Tipps zur Anwendung dieser Methode	10
	Aufgaben 2, 3 und 4	13
1.7	Entwicklung von Determinanten nach Zeilen und Spalten	14
	Musterbeispiele für eine schnelle Berechnung	16
	Aufgabe 5	17
§ 2	Drei Gleichungen mit drei Unbekannten	18
2.1	Gleichungssysteme mit Nennerdeterminante. $D \neq 0$	19
	Aufgabe 6	21
2.2	Gleichungssysteme mit Nennerdeterminante $D = 0$	21
	Aufgabe 7 und 8	23
§ 3	Vier Gleichungen mit drei Unbekannten	24
	Aufgabe 9	27
	Lösungen der Aufgaben 1 bis 9	29 – 48

§ 1 Zwei- und dreireihige Determinanten

1.1 Zweireihige Determinanten (Wiederholung aus 61012)

Eine Determinante ist ein quadratisches Schema von Zahlen, aus dem nach einer festgelegten Vorschrift eine Zahl berechnet wird.

Beispiele: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}$ ist eine zweireihige Determinante.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -4 \\ 5 & 3 & -1 \end{vmatrix}$ ist eine dreireihige Determinante usw.

Eine vierreihige Determinante enthält 16 Zahlen im Quadrat angeordnet.

Berechnungsvorschrift für zweireihige Determinanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \quad (1)$$

Die Diagonale $\begin{vmatrix} a_1 & \\ & b_2 \end{vmatrix}$ nennt man die Hauptdiagonale. Ihr Produkt wird zuerst berechnet.

Dann subtrahiert man davon das Produkt der Nebendiagonalen $\begin{vmatrix} & b_1 \\ a_2 & \end{vmatrix}$

Beispiele:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$

(b) $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 5 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) = 45 + 6 = 51$

(c) $\begin{vmatrix} 6 & 8 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 6 \cdot 12 - 9 \cdot 8 = 72 - 72 = 0$

(d) $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 = 0$

(e) $\begin{vmatrix} k & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6k - 8$

Zusatzfrage: Wann ist diese Determinante 0? $6k - 8 = 0 \Leftrightarrow 6k = 8 \Leftrightarrow k = \frac{8}{6} = \frac{3}{4}$

(f) $\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 12 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 3 = 6 - 15 = -9$

(g) $\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 10 = 0$

(h) $\begin{vmatrix} 18 & -22 \\ -9 & 11 \end{vmatrix} = 198 - 198 = 0$